• On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n}(e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}) = 0$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$

de même $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{-1}{n^2}} - e^{-1}}{2n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Conclusion : La suite (U_n) converge vers 0.

Solution 7 :

1°/a) f est définie, continue et dérivable sur $[0\,,1]$

$\forall x \in [0\,,1]$, $f'(x) = \dfrac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} > 0$

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{e}{3}$

b) f' est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$,

$$f''(x) = \frac{(x+2)^2 e^x(x+2) - 2(x+2)e^x(x+1)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3} > 0 \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

donc f' est strictement croissante sur $[0,1]$ et par suite

$\forall x \in [0,1]$, $0 \le x \le 1 \Rightarrow f'(0) \le f'(x) \le f'(1)$

$f'(0) = \dfrac{1}{4}$ et $f'(1) = \dfrac{2e}{9} < \dfrac{2}{3}$

Conclusion : $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{4} \le f'(x) \le \dfrac{2}{3}$